ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

o0o

LÊ THỊ PHƯƠNG NGA

VỀ MÔĐUN ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG ARTIN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN, NĂM 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

o0o

LÊ THỊ PHƯƠNG NGA

VỀ MÔĐUN ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG ARTIN

Ngành: Đại số và lý thuyết số
Mã số: 8 46 01 04

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

CÁN BỘ HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. TRẦN ĐỖ MINH CHÂU

THÁI NGUYÊN, NĂM 2018

Mục lục

LỜI CẢM ƠN

Luận văn "Về môđun đối đồng điều địa phương Artin" được thực hiện tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn nhiệt tình, tận tụy của TS. Trần Đỗ Minh Châu. Tác giả xin bảy tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới người hướng dẫn khoa học của mình. Đồng thời, tác giả xin trân trọng cảm ơn tới GS. TS. Lê Thị Thanh Nhàn với những góp ý quý báu của cô để luận văn được hoàn thiện hơn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Ban giám hiệu Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái nguyên, Ban chủ nhiệm Khoa Toán cùng các thầy cô khoa Toán đã tham gia giảng dạy và tạo điều kiện tốt nhất để tác giả học tập và nghiên cứu.

Tôi cũng xin chân thành cảm ơn Ban Giám đốc và các đồng nghiệp Trung tâm HN và GDTX Tỉnh Quảng Ninh đã tạo điều kiện cho tôi hoàn thành nhiệm vụ học tập của mình.

Nhân dịp này, tôi xin gửi lời cảm ơn tới gia đình và bạn bè đã động viên giúp đỡ tôi rất nhiều trong quá trình học tập.

MỞ ĐẦU

Lý thuyết đối đồng điều địa phương được A. Grothendieck giới thiệu vào năm 1960. Sau đó lý thuyết này nhanh chóng phát triển và thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học trên thế giới, trở thành công cụ nghiên cứu không thể thiếu trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học như Đại số giao hoán, Hình học đại số, Đại số tổ hợp,...

Một trong những tính chất quan trọng của môđun đối đồng điều địa phương là tính Artin. Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành giáo hoán Noether địa phương, M là R-môđun hữu hạn sinh với chiều d và I là iđêan của R. Năm 1971, I. G. Macdonald và R. Y. Sharp [16] đã chứng minh được môđun đối dồng điều địa phương với giá cực đại $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ luôn là Artin với mọi $i \geq 0$. Sau đó R. Y. Sharp [28] phát hiện ra lớp môđun đối đồng điều địa phương Artin thứ hai là $H^d_I(M)$. Nhiều thông tin về hai lớp môđun đối đồng điều địa phương Artin này đã được phản ánh trong các công trình của R. Y. Sharp [27], M. Brodmann-Sharp [3], N. T. Cường, L. T. Nhàn...

Theo I. G. Macdonald [15], tập iđêan nguyên tố gắn kết của R-môđun Artin, kí hiệu là $\operatorname{Att}_R A$, có vai trò quan trọng tương tự như tập iđêan nguyên tố liên kết đối với môđun hữu hạn sinh. Mục đích của luận văn là trình bày lại một số kết quả gần đây trong các bài báo [3], [24], [20], [22] về mô tả tập iđêan nguyên tố gắn kết, đặc trưng tính bão hòa nguyên tố và xây dựng công thức số bội của $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ và $H^d_I(M)$ khi R là thương của vành Cohen-Macaulay và các môđun này thỏa mãn tính bão hòa nguyên tố. Nhắc lại rằng một R-môđun Artin A được gọi là thỏa mãn tính bão hòa nguyên tố nếu $\operatorname{Ann}_R(0 :_A \mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ với mỗi iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ chứa $\operatorname{Ann}_R A$ (xem [8]).

Ngoài phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, nội dung luận văn được trình bày thành ba chương:

Chương 1 trình bày một số kiến thức chuẩn bị về vành catenary phổ dụng, tập iđêan nguyên tố gắn kết của môđun Artin, chiều, số bội, tính bão hòa nguyên tố của môđun Artin và môđun đối đồng điều địa phương Artin. Những kiến thức này liên quan đến các kết quả và chứng minh ở chương 2 và 3.

Chương 2 trình bày các kết quả về tập iđêan nguyên tố gắn kết và số bội của môđun đối đồng địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ trong trường hợp vành cơ sở là thương của vành Cohen-Macaulay.

Chương 3 trình bày đặc trưng tính bão hòa nguyên tố của hai lớp môđun đối đồng điều địa phương Artin thông qua tính catenary của vành, từ đó mô tả tập iđêan nguyên tố gắn kết và xây dựng công thức bội liên kết cho hai lớp môđun này khi chúng thỏa mãn tính bão hòa nguyên tố.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2018

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong suốt luận văn này, nếu không nói gì thêm, luôn giả thiết $(R, \mathfrak{m})$ là vành giao hoán Noether địa phương, $\widehat{R}$ là vành đầy đủ $\mathfrak{m}$-adic của R, I là iđêan tùy ý của R. Ta cũng ký hiệu A là R-môđun Artin, M là R-môđun hữu hạn sinh có $\dim(M) = d$ và N, L là các môđun tùy ý của R.

Mục tiêu của chương này là giới thiệu những khái niệm và các tính chất cơ bản về vành catenary phổ dụng, tập iđêan nguyên tố gắn kết, chiều, số bội, tính bão hòa nguyên tố của môđun Artin và môđun đối đồng điều địa phương Artin sẽ được sử dụng trong luận văn.

1.1 Vành catenary phổ dụng

Trong tiết này, chúng tôi nhắc lại một số khái niệm và kết quả của vành catenary phổ dụng. Chú ý rằng, do R là vành Noether địa phương nên với mọi cặp iđêan nguyên tố $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ của R luôn tồn tại dãy các iđêan nguyên tố bão hòa giữa $\mathfrak{p}$ và $\mathfrak{q}$ có độ dài n

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n \subset \mathfrak{q}\,.$$

Định nghĩa 1.1.1. Nếu với mỗi cặp iđêan nguyên tố $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ của R, mọi dãy iđêan nguyên tố bão hòa giữa $\mathfrak{p}$ và $\mathfrak{q}$ đều có chung độ dài thì vành R được gọi là *catenary*.

Rõ ràng nếu R là catenary thì $R_{\mathfrak{p}}$ là catenary với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. Ngoài ra vành catenary còn có tính chất sau.

Mệnh đề 1.1.2. (Xem [30]) *Các mệnh đề sau là đúng:*

(i) Nếu R là catenary thì vành thương của R cũng là catenary.

(ii) R là catenary khi và chỉ khi $\dim(R/\mathfrak{q}) = \dim(R/\mathfrak{p}) + \operatorname{ht}(\mathfrak{p}/\mathfrak{q})$ *với mọi iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ thỏa mãn $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$.*

Một trong những loại vành catenary đặc biệt có tính chất quan trọng là vành catenary phổ dụng.

Định nghĩa 1.1.3. (Xem [17]) Vành R được gọi là *vành catenary phổ dụng* nếu mỗi R-đại số hữu hạn sinh là catenary.

Nếu $\operatorname{depth}(R) = \dim(R)$ thì R được gọi là *vành Cohen-Macaulay* địa phương. Theo định nghĩa của M. Nagata [19], vành R được gọi là *tựa không trộn lẫn* nếu $\dim(\widehat{R}/\mathfrak{P}) = \dim(\widehat{R})$ với mọi $\mathfrak{P} \in \min(\operatorname{Ass} \widehat{R})$. Định lý sau đây chỉ ra điều kiện để một vành là vành catenary phổ dụng thông qua tính không trộn lẫn và tính Cohen-Macaulay của vành.

Định lý 1.1.4. (Xem [29, Định lý 17.9,31.6]) *R là vành catenary phổ dụng nếu thỏa mãn một trong các điều kiện sau:*

(i) R là tựa không trộn lẫn;

(ii) R là thương của một vành Cohen-Macaulay.

Định lý sau đưa ra một số đặc trưng của vành catenary phổ dụng.

Định lý 1.1.5. *Các điều kiện sau là tương đương:*

(i) R là catenary phổ dụng;

(ii) Vành đa thức một biến $R[x]$ là catenary;

(iii) $R/\mathfrak{p}$ là tựa không trộn lẫn với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$.

1.2 Tập iđêan nguyên tố gắn kết của môđun Artin

Lý thuyết biểu diễn thứ cấp cho các môđun được giới thiệu bởi I. G. Macdonald [15] có thể xem là đối ngẫu của lý thuyết phân tích nguyên sơ. Từ biểu diễn thứ cấp, tập iđêan nguyên tố gắn kết của một môđun được định nghĩa. Khái niệm này theo một nghĩa nào đó là tương tự với khái niệm iđêan nguyên tố liên kết của môđun hữu hạn sinh.

Định nghĩa 1.2.1. (i) Một R-môđun N được gọi là *thứ cấp* nếu $N \neq 0$ và với mỗi $r \in R$ ta có $rN = N$ hoặc tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $r^n N = 0$. Trong trường hợp này, tập hợp các phần tử $r \in R$ sao cho phép nhân bởi r trên N là lũy linh làm thành một iđêan nguyên tố. chẳng hạn là $\mathfrak{p}$, và ta gọi N là $\mathfrak{p}$-*thứ cấp*.

(ii) Cho N là R-môđun. Biểu diễn $N = N_1 + \ldots + N_n$, trong đó mỗi N_i là môđun con $\mathfrak{p}_i$-thứ cấp N, được gọi là *một biểu diễn thứ cấp* của N. Nếu $N = 0$ hoặc N có biểu diễn thứ cấp thì ta nói N là *biểu diễn được*. Biểu diễn này gọi là *tối tiểu* nếu các iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}_i$ là đôi một khác nhau và mỗi N_i là không thừa với mọi $i = 1, \ldots, n$.

Chú ý rằng, nếu N_1, N_2 là các môđun con $\mathfrak{p}$-thứ cấp của N thì $N_1 + N_2$ cũng là môđun con $\mathfrak{p}$-thứ cấp của N. Vì thế mọi biểu diễn thứ cấp của N đều có thể đưa được về dạng tối tiểu bằng cách bỏ đi những thành phần thừa và gộp lại những thành phần cùng chung một iđêan nguyên tố. Tập hợp $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ là độc lập với việc chọn biểu diễn thứ cấp tối tiểu của N và được gọi là *tập các iđêan nguyên tố gắn kết* của N, kí hiệu là $\operatorname{Att}_R N$. Các hạng tử N_i, với $i = 1, \ldots, n$, được gọi là các *thành phần thứ cấp* của N. Nếu $\mathfrak{p}_i$ là tối tiểu trong tập $\operatorname{Att}_R N$ thì $\mathfrak{p}_i$ được gọi là *iđêan nguyên tố gắn kết cô lập* của N và N_i được gọi là *thành phần thứ cấp cô lập* của N.

Định lý sau đây cho ta một lớp các môđun biểu diễn được.

Định lý 1.2.2. [15, Định lý 5.2] *Mọi môđun Artin đều biểu diễn được.*

Mệnh đề 1.2.3. (Xem [16]) *Giả sử A là R-môđun Artin. Khi đó các phát biểu sau là đúng:*

(i) $\operatorname{Att}_R A \neq \emptyset$ *khi và chỉ khi* $A \neq 0$.

(ii) $\min \operatorname{Att}_R A = \min \operatorname{Var}(\operatorname{Ann}_R A)$. *Đặc biệt,*

$$\dim(R/\operatorname{Ann}_R A) = \max\left\{\dim(R/\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Att}_R A\right\}.$$

(iii) $\operatorname{Att}_R A = \{\mathfrak{m}\}$ *khi và chỉ khi* $A \neq 0$ *và* $\ell_R(A) < \infty$.

Cho A là R-môđun Artin và $\widehat{r} \in \widehat{R},\ x \in A$. Gọi $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Côsi trong R đại điện cho lớp $\widehat{r}$. Vì Rx có độ dài hữu hạn nên tồn tại số tự nhiên k sao cho $\mathfrak{m}^k x = 0$. Chú ý rằng tồn tại n_0 sao cho $r_n - r_m \in \mathfrak{m}^k$ với mọi $m, n \geq n_0$. Suy ra $r_n x = r_{n_0} x$ với mọi $n \geq n_0$. Khi đó A có cấu trúc tự nhiên như $\widehat{R}$-môđun với tích vô hướng $\widehat{r}x = r_{n_0}x$. Do đó, một môđun con của A xét như R-môđun khi và chỉ khi nó là môđun con của A xét như $\widehat{R}$-môđun. Vì thế A là $\widehat{R}$-môđun Artin. Ta cũng có thể xác định được cấu trúc R-môđun ban đầu trên A nếu xem $\widehat{R}$-môđun A này như R-môđun xác định bởi đồng cấu tự nhiên $R \to \widehat{R}$. Như vậy, tập iđêan nguyên tố gắn kết của A trên R và $\widehat{R}$ luôn xác định và ta có mối liên hệ giữa các tập iđêan nguyên tố gắn kết này như sau.

Mệnh đề 1.2.4. [28, Bổ đề 2.1]

$$\operatorname{Att}_R A = \left\{\mathfrak{P} \cap R \mid \mathfrak{P} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}} A\right\}.$$

Tổng quát hơn, tính chất chuyển tập iđêan nguyên tố gắn kết của một môđun Artin qua đồng cấu phẳng địa phương được phát biểu trong mệnh đề sau.